

# INDÉCISION DE L'INTERSECTION ENTRE DEUX SEGMENTS

Par Pascal FASQUEL, Laurent RAYNAL  
IGN / COGIT, 2, Avenue Pasteur, 94160 Saint-Mandé (FRANCE)

## RÉSUMÉ

La plupart des objets naturels doivent être discrétisés afin d'en obtenir une description géométrique. Le pas de discrétisation ou résolution entraîne que la position relative de segments discrétisés n'est plus aussi simple que dans  $\mathbb{R}^2$ . En effet, elle dépend de la position de la grille de résolution sur laquelle sont définis ces segments. Nous présentons dans cet article une nouvelle définition de l'intersection de deux segments tenant compte de la résolution et introduisons à cet effet les notions de zone d'indécision et d'indécision de l'intersection de deux segments.

## 1 Introduction

### 1.1 Discrétisation de l'espace

La complexité du monde réel nous empêche de le représenter avec une fidélité absolue et ceci quel que soit le mode de représentation choisi pour représenter des données localisées. En effet, si certains objets, aux formes simples et régulières, peuvent être modélisés par des fonctions mathématiques, la plupart des objets naturels doivent être discrétisés afin d'en obtenir une description géométrique. Ainsi, lors du passage au numérique, la représentation des données devient discrète et finie.

### 1.2 Représentation géométrique des entités géographiques

En ce qui concerne les données vecteur, auxquelles nous nous intéressons ici, la représentation géométrique

de ces entités géographiques repose sur les notions de point, ligne et de polygone. Un point est modélisé par des coordonnées dans un certain système de référence. L'approximation la plus courante d'une ligne est une représentation sous forme de segments. Quant au polygone, on le définit couramment par son contour, donc une ligne, soit une liste de segments. Le concept de segment est, par conséquent, présent quasiment partout dans la représentation. Or lors de la manipulation d'entités géographiques dans un SIG, une opération des plus communes est l'intersection de lignes et de polygones. Ainsi, apparaît l'intersection de deux segments comme une opération fondamentale dans le traitement des données géographiques.

### 1.3 Résolution

La discrétisation de l'espace évoquée précédemment entraîne une perte d'information plus ou moins sensible selon le pas utilisé. Ce pas dénommé plus communément **résolution** correspond donc à l'unité minimale d'information spatiale.

Ainsi, l'intersection de deux segments dans cet espace discret et limité où sont représentées les données géographiques numérisées peut être différente de l'intersection de ces mêmes segments dans  $\mathbb{R}^2$ . De plus, la position relative de deux segments dépend de la position de la grille (cf. figure 1.1 et 1.2), ce qui n'est pas souhaitable car différents utilisateurs peuvent se référer à des grilles distinctes en position. Il est donc nécessaire lors de calcul d'intersection de tenir compte de la notion de résolution.



1.1



1.2

Figure 1.1 et 1.2 : position relative de deux segments en fonction de la position de la grille

Le reste de cet article s'articule de la façon suivante : la deuxième partie relate brièvement certains travaux menés dans ce secteur, la troisième présente notre solution, puis nous concluons sur les points de notre travail à approfondir.

## 2 Existant

Différents travaux ont été menés dans le domaine de la géométrie algorithmique sur les problèmes d'intersection en géométrie discrète. La méthode proposée dans [2], notamment, permet d'éviter les incohérences topologiques que peuvent entraîner des intersections multiples de segments sur une grille de résolution. Dans [3], l'auteur fonde son modèle de données géométriques sur la notion de «realm» qui se définit comme un ensemble de points et de segments décrits sur une grille (domaine discret) et s'inspire de [2] pour les problèmes d'intersection.

Cependant, ceci ne permet pas d'envisager l'intersection de données définies sur des grilles différentes, ce qui peut se produire dans une base de données réparties en plusieurs couches lorsque l'on a besoin de superposer plusieurs de ces couches. De plus, la volonté d'indépendance vis à vis de la position de la grille n'est pas prise en compte dans ces travaux. Aussi, nous nous proposons dans la partie suivante de considérer la possibilité d'intersection de segments définis sur des grilles de résolution distincte.

## 3 Indécision de l'intersection de deux segments

Nous définissons dans cette partie diverses notions qui nous permettront ensuite de définir l'intersection de deux segments dans la partie 4. Nous nous appuyerons sur les notations mathématiques usuelles.

### 3.1 Faisceaux de segments et zone d'indécision

Soient A et B deux points mobiles respectivement dans les carrés  $C_a(A)$  et  $C_a(B)$  d'intérieurs disjoints.

#### Définition 1

On appelle **faisceau** d'appui  $C_a(A)$  et  $C_a(B)$  l'ensemble des segments  $[AB]$  lorsque A parcourt  $C_a(A)$  et B parcourt  $C_a(B)$ . Il est noté  $f_a(A,B)$ .

#### Définition 2

Soient A et B deux points mobiles dans les carrés  $C_a(A)$  et  $C_a(B)$  respectivement, définissant un faisceau  $f_a(A,B)$ .

On appelle **zone d'indécision** associée au faisceau  $f_a(A,B)$ , notée  $ZI_a(A,B)$ , l'intérieur de l'ensemble des points appartenant au faisceau  $f_a(A,B)$ , soit :

$$ZI_a(A,B) = \overset{\circ}{E} \text{ avec } E = \{P \in \mathcal{R}^2 / \exists s \in f_a(A,B), P \in s\}$$

(cf. figure 2.1).

### 3.2 Indécision de l'intersection d'un segment fixe et d'une zone d'indécision

L'indécision de l'intersection de deux segments est, dans un premier temps, définie pour un segment «mobile» définissant un faisceau et un segment «fixe».

#### Définition 3

Soient A et B deux points mobiles dans les carrés  $C_a(A)$  et  $C_a(B)$  respectivement de manière à définir un faisceau  $f_a(A,B)$ . Soit également un segment «fixe»  $[CD]$ .

On dit qu'il y a **indécision de l'intersection** de  $[AB]$

avec  $[CD]$  si et seulement si :

$$\exists (s1, s2) \in f_a(A,B) / s1 \cap [CD] = \emptyset,$$

$$]s2[ \cap ]CD[ \neq \emptyset, \quad \text{adjl}(s2, [CD]) = \emptyset$$

(où :  $]s[$  signifie que s est privé de ses extrémités et  $\text{adjl}(s2, [CD]) = \emptyset$  signifie que s2 et  $[CD]$  ne sont pas adjacents par lignes)

Ceci signifie que l'on peut trouver deux segments du faisceau tel que l'un coupe le segment fixe en un point unique, sans que cette intersection soit une extrémité d'un des segments, et que l'autre et le segment fixe soient disjoints.

#### Exemples :

- sur la figure 2.1 et sur la figure 2.2, il y a indécision car s1 et  $[CD]$  sont disjoints alors que s2 et  $[CD]$  se coupent en un point différent d'une extrémité de s2 et de  $[CD]$ .

- sur la figure 2.3 il y a décision car tous les segments du faisceau coupent  $[CD]$ .

- sur la figure 2.4 il y a décision car le seul segment du faisceau coupant  $[CD]$  est adjacent à  $[CD]$ .

- sur la figure 2.5 il y a décision les segments du faisceau intersectant  $[CD]$  ne réalisent cette intersection qu'en une extrémité.

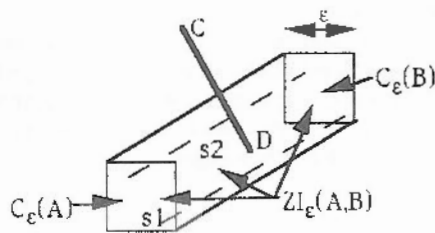


Figure 2.1 : indécision

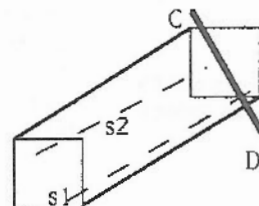


Figure 2.2 : indécision

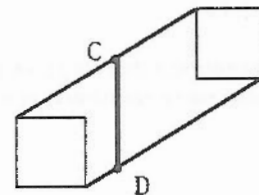


Figure 2.3 : décision

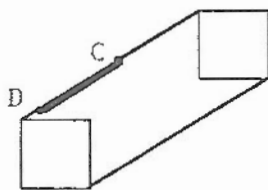


Figure 2.4 : décision

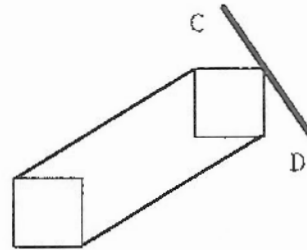


Figure 2.5 : décision

Il est envisageable de ne pas considérer la troisième condition de la définition et de remplacer la deuxième par l'expression suivante :  $(\{s2\} \cap [CD] \neq \emptyset)$ . Avec une telle modification, les cas 2.4 et 2.5 seraient indécis. De plus, cette nouvelle définition est plus simple, mais elle ne permet pas d'établir un théorème aussi simple que le théorème 1.

#### Théorème 1

Soient A et B deux points du plan définissant un faisceau  $f_e(A,B)$  et un segment  $[CD]$ . Il y a indécision de l'intersection de  $[AB]$  avec  $[CD]$  si et seulement si C ou D appartiennent à  $ZI^e(A,B)$  ou  $[CD] \cap (C_\epsilon^o(A) \cup C_\epsilon^o(B)) \neq \emptyset$

#### 3.3 Indécision de l'intersection de deux zones d'indécision

On s'intéresse maintenant au cas où  $[CD]$  n'est plus fixe, mais décrit un faisceau  $f_m(C,D)$ . C et D appartiennent donc respectivement à des carrés d'intérieurs disjoints de côté m (m pouvant différer de e). On définit alors l'indécision de l'intersection de deux segments décrivant des faisceaux.

#### Définition 4

Soient A, B et C, D définissant respectivement les faisceaux  $f_e(A,B)$  et  $f_m(C,D)$ . Il y a indécision de l'intersection de  $[AB]$  avec  $[CD]$  si et seulement si :

$$\exists (s1, s2) \in f_e(A,B), \exists (r1, r2) \in f_m(C,D) / s1 \cap r1 = \emptyset, \\ ]s2[ \cap ]r2[, \quad adjl(s2, r2) = \emptyset$$

(c'est à dire si l'on peut trouver un segment du premier faisceau et un segment du second qui ne s'intersectent pas, mais également un segment du premier faisceau et un segment du second s'intersectant en un point unique autre qu'une extrémité d'un des deux segments)

#### Théorème 3

Soient A, B et C, D définissant respectivement les faisceaux  $f_e(A,B)$  et  $f_m(C,D)$ . Il y a indécision de l'intersection de  $[AB]$  avec  $[CD]$  si et seulement si l'une au moins des deux conditions suivantes est satisfaite :

$$(C_\epsilon(B) \cup C_\epsilon(A)) \cap ZI_\mu(C,D) \neq \emptyset$$

$$(C_\mu(C) \cup C_\mu(D)) \cap ZI_\epsilon(A,B) \neq \emptyset$$

(c'est à dire si un des carrés décrit par une extrémité d'un des segments intersecte la zone d'indécision de l'autre segment).

La démonstration de ce théorème utilisant le théorème 1 ainsi que d'autres résultats intermédiaires ne pouvant être détaillés ici, figure dans [1].

## 4 Conclusion

### 4.1 Définition de l'opération d'intersection

Les résultats précédents vont nous permettre de définir l'intersection de segments sur une même grille ou sur des grilles de résolution distinctes. En outre, si l'on veut définir cette intersection indépendamment de la position de la grille (cf. 1.3) les résultats précédents doivent être appliqués avec des carrés de côté deux fois la résolution de la grille sur laquelle sont définis ces segments.

- il y a disjonction si les zones d'indécision des deux segments ne s'intersectent pas,

- il y a indécision si les conditions du théorème 3 sont satisfaites,

- il y a intersection des deux segments si les zones d'indécision se rencontrent et s'il n'y a pas indécision.

#### 4.2 Perspectives, points à approfondir

A l'heure actuelle, l'intégration de cette opération d'intersection dans des problèmes plus complexes n'a pas été faite. La notion d'indécision de l'intersection de segments n'est pour l'instant que théorique, sa gestion dans des applications pratiques reste à développer.

La prise en compte de grilles n'ayant pas la même résolution partout est à envisager.

---

#### Références

- [1] P. Fasquel, «Expression de contrôle de cohérence géographique dans un langage indépendant des SIG». Mémoire de DEA, Ecole Nationale des Sciences Géographiques, 1994.
- [2] D. Greene and F. Yao, «Finite-Resolution Computational Geometry», Proc 27th IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, 1986, 143-152.
- [3] R.H. Güting and M. Schneider, «Realm-Based Spatial Data Types : The ROSE Algebra». Fachbereich Informatik, FernUniversität Hagen, Report 141, 1993.